24/10/2017

$U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ (*) $(\mathbb{R}^n \setminus U) \cap B(\bar{x}, \varepsilon_0) \neq \emptyset$

$\bar{x}$ μεμον. σημείο $\iff \exists \varepsilon_0 > 0 \quad U \cap B(\bar{x}, \varepsilon_0) = \{\bar{x}\}$

σημ. συσσώρευσης $\iff \forall \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

σημ. επαφής $\iff$ $\bar{x}$ σημ. συσσ. ή $\bar{x} \in U$

Παρατηρήσεις:

(α) $\bar{x}$ μεμ. σημ $\Rightarrow \bar{x} \in U \cap \partial U$

[$\bar{x} \in U$ ✓ $\bar{x} \in \partial U \iff \bar{x} \notin \text{ext}U \wedge \bar{x} \notin \text{int}U$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad B(\bar{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset \wedge \underbrace{B(\bar{x}, \varepsilon) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus U}$.

[$\bar{x} \in \text{int}U \iff \exists \varepsilon > 0 \quad B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \iff$ $\iff B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$.

$\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) = \emptyset$]

(*) $\forall \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad : (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \neq \emptyset$

(αφού $\forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \quad \bar{y} \notin U$)

Επίσης, $\forall \quad \varepsilon > \varepsilon_0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \supset B(\bar{x}, \varepsilon_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset$

(β) $x \in U \Rightarrow \bar{x}$ ή μεμ. σημείο ή σημ. συσσ.

[Έστω ότι $\bar{x}$ δεν είναι μεμονωμένο σημείο.

Τότε $\forall \varepsilon > 0 : \underbrace{U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \supsetneq \{\bar{x}\}}$

$\Rightarrow U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$ δηλ. $\bar{x}$ σημ. συσσ.]

(γ) $\text{int}U \subset U'$ (δηλ. κάθε εσωτερικό σημείο είναι σημείο συσσώρευσης.)

($\Rightarrow$ κάθε σημείο ενός ανοικτού συνόλου είναι σημ. συσσ.)

[Έστω $x \in \text{int}U \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \quad B(\bar{x}, \varepsilon_0) \subset U \Rightarrow$

$B(\bar{x}, \varepsilon_0) \setminus \{\bar{x}\} \subset U \Rightarrow \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \subset U$

$\Rightarrow U \cap B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} = B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

και $\forall\ \varepsilon > \varepsilon_0$: $B(\bar{x},\varepsilon_0) \setminus \{\bar{x}\} \subset B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon > \varepsilon_0 \quad \underbrace{U \cap B(\bar{x},\varepsilon_0) \setminus \{\bar{x}\}}_{\neq \emptyset} \subset \underbrace{U \cap B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}}_{\neq \emptyset}$]

(δ) $\operatorname{ext} U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$:

[$\bar{x} \in \operatorname{ext} U \Leftrightarrow \bar{x} \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \Leftrightarrow$

$\exists\ \varepsilon > 0 : B(\bar{x},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U \Leftrightarrow$

$\exists\ \varepsilon > 0 : B(\bar{x},\varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow$

$\exists\ \varepsilon > 0 : B(\bar{x},\varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} = U \cap B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} = \emptyset \Rightarrow$

$\bar{x}$ δεν είναι σημ. συσσ. $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n \setminus U'$]

Πρόταση : $U \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{U} = U \cup U'$

Απόδειξη: (α) $U \cup U' \subset \bar{U}$: $U \subset \bar{U}$

Θ.ν.δ.ο. $U' \subset \bar{U}$, δηλ. Θ.ν.δ.ο. $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \underset{\bar{U} \text{ κλειστό}}{\Rightarrow} \exists\ \varepsilon > 0\ B(\bar{x},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U$

$U \subset \bar{U}$

$\Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow \bar{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης $\Leftrightarrow \bar{x} \notin U' \Leftrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U'$

(b) $\bar{U} \subset U \cup U'$:

Θ.ν.δ.ο. $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus (U \cup U')}_{= (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U')} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ και δεν είναι σημείο συσσ.

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0 : B(\bar{x},\varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} = \emptyset$

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0 : U \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x},\varepsilon)$

$\Rightarrow \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x},\varepsilon) \overset{(*)}{\Rightarrow} B(\bar{x},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \Rightarrow$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$.

(*) [Επειδή $\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x},\varepsilon)$ κλειστό που περιέχει το U και για κάθε K κλειστό που περιέχει το U, ξέρω ότι $\bar{U} = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} L \subset K$]

(*) $\Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon) \cap \bar{U} = \emptyset \Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

Άσκηση $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\iff$ $U' \subset U$

Πρόταση : (ΧΡΗΣΙΜΗ)

$U \subset \mathbb{R}^n \implies \overline{U} = (\text{int}U) \cup (\text{bd}U)$

Απόδειξη : Αφού έχουμε $\mathbb{R}^n = \text{ext}U \cup \text{int}U \cup \text{bd}U =$ (ξένα μεταξύ τους)

$\mathring{U} \cup \partial U$

Θ.ν.δ.ο. $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U} = \text{ext}U$

Αφού $\overline{U}$ κλειστό και $U \subset \overline{U}$ έχουμε $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U} =$

$\text{int}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}) \underset{\text{πρόταση}}{\subset} \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) = \text{ext}U$

Από την άλλη (για να δείξω $\text{ext}U \subset \mathbb{R}^n \setminus U$)

$\forall \bar{x} \in \text{ext}U \rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U \implies$

$\bar{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U') \iff$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (U \cup U') = \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$

(*) (δ) $\text{ext}U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$

↳ από την προηγούμενη παρατήρηση.

Άσκηση: Βρείτε το σύνορο, την κλειστή θήκη και το εσωτερικό (α) της ανοικτής μπάλας

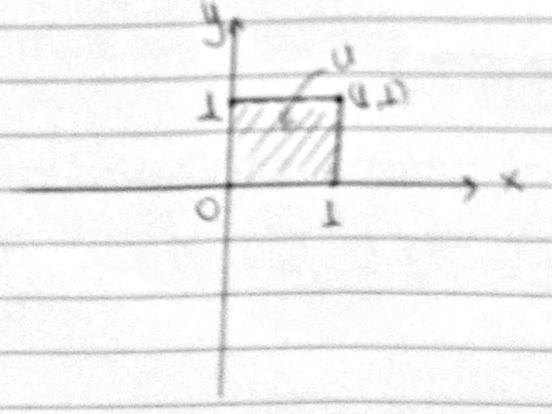
(β) της κλειστής μπάλας

(γ) της σφαίρας

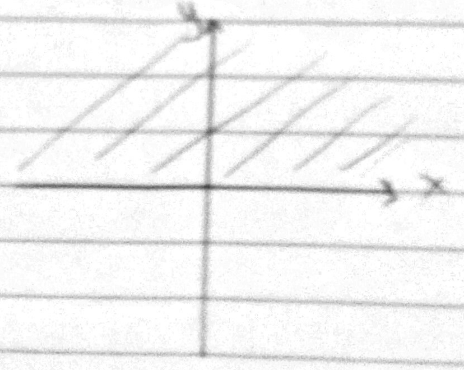
(δ) του $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; y > 0\}$

(ε) του $U = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\}$

(ε)



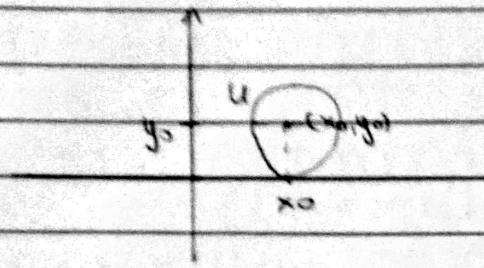
δ)



$\partial U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} =$

$\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} =$

$\mathbb{R} \times \{0\}$

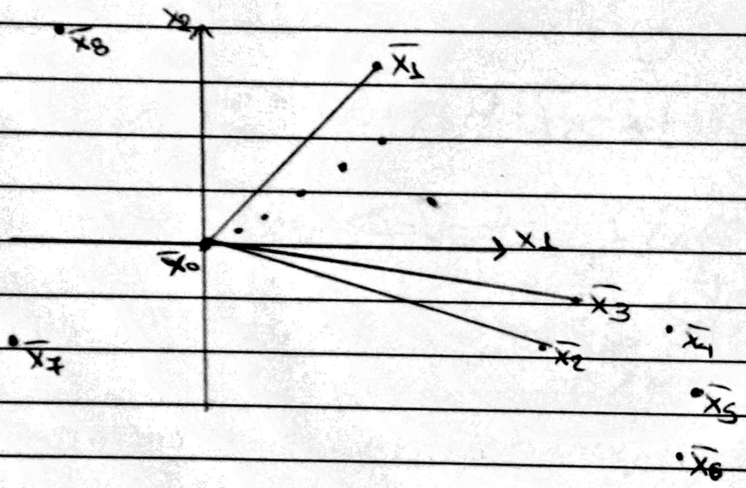


στ) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x>0\}$.

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία απεικόνιση/συνάρτηση $\mathbb{N} \ni \nu \longmapsto \bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$

Άσκηση



Ορισμός: Μία ακολουθία $\underbrace{(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}} \subset \mathbb{R}^n$

"=" $\{\bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n : \nu \in \mathbb{N}\}$ (εικόνα της ακολουθίας)

$= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$: $\Longleftrightarrow$

$\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ $\qquad \bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \bar{x}_0$

Άσκηση Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις $\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{\nu}\right)$, $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^3}, 6, 7, 8, 9\right) \in \mathbb{R}^6$,

$\left(\sin\frac{1}{\sqrt{\nu}}, e^{-\nu}, \pi, \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^4$